PART3　確率変数の分散と標準偏差

例題

1 ～ 9 までの数字が書かれた 9 枚のカードから無作為に 1 枚取り出し，そのカードに書かれている数を X とする。X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

Point Pickup

練習

当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじがある。このくじを 1 本ずつ 2 回引いたときの当たりくじの本数を X とする。引いたくじは元にもどさないとして，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

第 5 講　PART3 確認問題

1　3枚の硬貨を同時に投げるとき，表が出る枚数を X とする。
X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

$$E(X)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

$$V(X)=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

$$\sigma(X)=\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

PART3　確率変数の分散と標準偏差

例題

1 ～ 9 までの数字が書かれた 9 枚のカードから無作為に 1 枚取り出し，そのカードに書かれている数を X とする。X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

確率変数 X の確率分布は下の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	計
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

X の期待値は

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{9}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{1}{9}+7\cdot\frac{1}{9}+8\cdot\frac{1}{9}+9\cdot\frac{1}{9}=5$$

X の分散は

$$V(X)=(1-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(2-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(3-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(4-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(5-5)^2\cdot\frac{1}{9}$$
$$+(6-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(7-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(8-5)^2\cdot\frac{1}{9}+(9-5)^2\cdot\frac{1}{9}$$
$$=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{60}{9}}=\frac{2\sqrt{15}}{3}$$

（分散の別解）

$$E\left(X^2\right)=1^2\cdot\frac{1}{9}+2^2\cdot\frac{1}{9}+3^2\cdot\frac{1}{9}+4^2\cdot\frac{1}{9}+5^2\cdot\frac{1}{9}+6^2\cdot\frac{1}{9}+7^2\cdot\frac{1}{9}+8^2\cdot\frac{1}{9}+9^2\cdot\frac{1}{9}$$
$$=\frac{285}{9}=\frac{95}{3}$$

よって　$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\frac{95}{3}-5^2=\frac{20}{3}$

練習

当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじがある。このくじを 1 本ずつ 2 回引いたときの当たりくじの本数を X とする。引いたくじは元にもどさないとして，X の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

確率変数 X のとりうる値は 0，1，2

$$P(X=0)=\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{42}{90}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{42}{90}$$

$$P(X=2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{6}{90}$$

よって，X の確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{42}{90}$	$\frac{42}{90}$	$\frac{6}{90}$	1

X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{42}{90}+1\cdot\frac{42}{90}+2\cdot\frac{6}{90}=\frac{54}{90}=\frac{3}{5}$$

X の分散は

$$V(X)=\left(0-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{42}{90}+\left(1-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{42}{90}+\left(2-\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{6}{90}=\frac{840}{25\cdot90}=\frac{28}{75}$$

X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{28}{75}}=\frac{2\sqrt{21}}{15}$$

(分散の別解)

$$E\left(X^2\right)=0^2\cdot\frac{42}{90}+1^2\cdot\frac{42}{90}+2^2\cdot\frac{6}{90}=\frac{66}{90}=\frac{11}{15}$$

よって　$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$

第 5 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウ：3，エ：4，オ：3，カ：2

[解説]

確率変数 X のとりうる値は 0，1，2，3 である。

$$P(X=0)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)={}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

よって，X の確率分布は次の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

X の期待値は

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}$$ [A]

$$=\frac{12}{8}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

[A]　確率変数の期待値（平均）
確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき，期待値は
$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

Xの分散は

$$V(X)$$

$$=\left(0-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}+\left(1-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{8}$$

$$+\left(3-\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{8}$$ [B]

$$=\frac{9}{32}+\frac{3}{32}+\frac{3}{32}+\frac{9}{32}$$

$$=\frac{24}{32}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

Xの標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$ [C]

$$=\sqrt{\frac{3}{4}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(別解)

$$E\left(X^2\right)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{24}{8}=3$$

よって

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$ [D]

$$=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

[B]　確率変数の分散

確率変数 X が下の表の確率分布に従うとき, X の期待値を $E(X)=m$ とすると, 分散は

$$V(X)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots\cdots+(x_n-m)^2p_n$$

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

[C]　確率変数の標準偏差

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$

[D]　分散の公式

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$